



TITLE:

最近のスイッチング理論 (情報科学 の数学的理論)

AUTHOR(S):

野崎, 昭弘

CITATION:

野崎, 昭弘. 最近のスイッチング理論 (情報科学の数学的理論). 数理解析
研究所講究録 1972, 156: 1-19

ISSUE DATE:

1972-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106863>

RIGHT:

最近のスイッチング理論

東大 情報研 野崎昭弘

従来、スイッチング理論とは、スイッチング素子によって組み立てられた回路の、内部構造をとり扱うものであった。

そして、全体を *black box* と考え、入出力の因果関係のみを扱うオートマトン理論と、区別して考えられてきた。

最近、オートマトン理論とスイッチング理論の境界は、次第に消失しつつある。たとえば、IEEE の *Transaction* の、*Switching Theory* のページを見ても、ループを含む回路の誤り検出など、以前ならばオートマトン理論に含めてもよいような問題が散見される。

このような変化の原因としては、理論の進歩と、工学的環境の変化との2つが挙げられると思う。すなわち、ブール関数の分解・合成から進んで、オートマトンの分解・合成がいろいろな角度から論じられるようになったことが、スイッチング理論の‘オートマトン理論化’を可能にした。また、LSI など、それ自身の中にすでに複雑な構造をもつ素子の出現によって、スイッチング素子の‘オートマトン化’がも

たらされた。それゆえ、古典的なブール関数を基本とするスイッチング理論だけでは、現実の要求に充分応えられないという時代になってきたのである。

一方、オートマトン理論は別々の発展をも示し、言詩理論との融合も著しい。それゆえ、オートマトン理論イコールスイッチング理論と考えるわけにはいかないが、オートマトンの分解・合成を論ずる領域は、現在スイッチング理論の一部分と考えた方が自然であるように思われる。

以上を前置として、次に Mukhopadhyay, A. の著物を中心に簡単な展望を試み、それから筆者の専門である完全性の問題について少し詳しい紹介を行いたい。^(§§1-3) ^(§4) (スイッチング理論全般にわたる、公平な展望にはなっていないことも、あらかじめお断りしておかなければならない)

以下、

A. Mukhopadhyay (ed.), Recent Developments in Switching Theory, Academic Press (1971) を、RDST と略して引用する。

§1 RDST の紹介

編集者の Amar Mukhopadhyay は、Iowa 大学の計算機科学科の助教授であるが、IEEE の Transaction の

Switching Theory の部内主査としている。この本は、ホット・ニュースがのっているとはもはやいえないが、最近話題になったいくつかのテーマがとりあげられており、展望の資料としては今でも価値を失なわないと思われる。

各章の標題と執筆者を紹介しておこう（括弧内にページ数を示す）。

I. Complete Sets of Logic Primitives (1-27)

..... A. Mukhopadhyay

いわゆる完全性の問題が解説されている。Post の結果とその証明、弱完全性 (almost complete, 小林孝次郎) についていくつかの結果を含んでいる。(§2 参照)

II. Combinational Circuits with Feedback

(28-56) D. A. Huffman

ループを含む回路の性質は、feed forward 型の回路からは想像できないところがある。ここでは、1個の NOT 素子で、Multi-inversion が実現できるという Huffman 自身の結果が、詳しく解説されている。(§3 参照)

III. Lupanov Decoding Networks (57-85)

..... A. Mukhopadhyay

リレー回路についての O. B. Lupanov の古典的な結果が解説されている。これは decoding network の問題と

して見ると、現在でも応用上の意味を失なわないようである。
一級理論への拡張の試みも述べられている。

IV. Counting and Their Applications to Classification of Switching Functions

(86-121) M. Harrison

ポリアの定理の解説と、そのブール関数の分類への応用が述べられている。群の定義から書き始めてあるので、この方面への入門 ~~読者~~ のためにも便利であると思う。

V. Harmonic Analysis of Switching Functions

(122-229) R. J. Lechner

ここではスイッチング理論へのフーリエ解析の応用が紹介される。ページ数からみてもわかるように、ていねいを解説である。手法的に面白いので、もっととりあげられてよい分野ではないか、と思われる。

VI. Universal Logic Modules (230-255)

..... H. Stone

n 入力の 1 個の素子に、 x_i , \bar{x}_i , 0, 1 をいろいろなしかたで入力することにより、どんな関数が実現できるかを考える。 n 変数の論理関数が全部実現できるとき、その素子と universal logic module という。ULM をさがす問題は見かけより手ごわいので、いくつかの戦略が紹介される。

VII. Cellular Logic (256-315)

..... A. Mukhopadhyay & H. Stone

カスケード型のセルラー・オートマトンと、2次元配列オートマトンが論じられている。日本では東北大学、京都大学などにおいて盛んに研究されている分野である。

VIII. The Theory of Multirail Cascades

(316-368) B. Elspas

ここでは群論を利用した、カスケード型オートマトンの出力関数の研究が解説される。群関数 (group function) の分解と、オートマトンの合成とが論じられている。

IX. Programmable Cellular Logic (369-422)

..... W. H. Kautz

1個または2個のフリップ・フロップを内蔵したセルの2次元配列の機能が考察されている。各フリップ・フロップを適当にセットすること (プログラミング) によって、全体の振舞いが変わるので、同じ配列が多目的に利用される。

巻末に、本文あるいは引用文献にあらわれないすべての人名の索引と、事項索引とがつけられている。

次に、筆者の特別の関心をひいたIとIIについて、コメントを述べてみたい。
(§§2-3)

§2 Complete sets について

この問題は、ソビエト、東・北欧および日本が著しく進んでいる反面、アメリカはかなり遅れている。そのためこの部分(1章)は、解説記事としては(後に触れる *almost complete* に因する節を除き)価値があると思うが、最近のレベルからみると非常に遅れている。それゆえ、どう英が古く、現在どのような結果が知られているかも指摘しておくことは無益ではあるまい。

ある論理関数族が完全(あるいは万能)であるとは、その族の中の関数と(重複も許し、変数の置き換えも許し、*feed back coupling* も許さずに)組み合わせることによって、任意の論理関数族が生成できることをいう。

完全性についての基本定理は E. Post によって与えられた(1921)。その証明は、その後 A. Yablonski, 伊吹・苗打・野村, C. Benzaken 等によって独立に与えられ、あまり *popular* であるとはいえないが、[2], [6] のような教科書にもうせられている。なお [2] は、すべての‘閉いた’関数族を分類・決定した結果を含む著作である。Mukhopadhyay が工夫したという証明は、非常によく整理されているが、本質的には伊吹等の証明と変りない。実は、半群の性質を利用したものとモダンな証明が知られており([8])

[6] にうせられている。

この問題は、二値論理の場合だけでなく、多値論理の場合にも解かれているが、1章から離れすぎるので、3.4で触れる。

さて、1で Mukhopadhyay は、almost complete (ac) の概念をとりあげている。しかしここには、Markov の結果についての重大な誤解が含まれているので、見逃すわけにはいかない。

論理関数族 F が、ac であることの定義をまず述べておこう。

F が ac $\iff \exists f_1, \dots, f_p$ (論理関数)

$\exists k_1, \dots, k_p$ (自然数):

任意の論理関数 f が、 $F \cup \{f_1, \dots, f_p\}$ が合成できる。ただし、 f_i は高々 k_i 回しか使用してはならない。

(回数とは、“素子の回数”として数える(出力の分岐を自由とする)。詳しくは1.あるいは[3]参照)

合成の手段として、feedback loop は許さない。もし許せば、1個の素子と無制限の AND, OR によって任意の関数を実現できる (Huffman)。それゆえ、 $\{AND, OR\}$ は feedback と許せば ac である。しかし、feedback

と許さない場合を考えているので、 $\{AND, OR\}$ が果たして ac かどうかが問題になる、というわけである。

$F \cup \{0, 1\}$ が complete (任意の関数か合成立可能) なら、 F は ac である (出力の分岐が自由なので、0, 1 をそれぞれ高々 1 回使うだけでよい)。このような F は, trivially ac と呼ばれ, non-trivially ac の方に興味をもたれているようである。(minimal non-trivially ac set についての条件などが, 定理 7.5, 定理 7.6 に述べられている)。 $\{AND, OR\}$ についての結論は示されておらず, ac sets の完全な特徴づけは not known だと述べられている。しかし, Markov と Post の結果から, 次の定理が容易に得られるのである。

定理 1 $\{AND, OR\}$ は ac でない

定理 2 単調増大関数の全体を M , 線型関数の全体を L とあらわす。すると,

$$F \text{ が trivially ac} \iff F \notin M \\ \text{かつ } F \notin L$$

定理 3 Non-trivially ac set は, 存在しない

定理 1 の根拠になるのは, Mukhopadhyay も引用している, Markov の次の結果である。

N 個の変数 x_1, \dots, x_N の反転 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$ が, m 個の

NOT と無制限の AND, OR とで実現可能

$$\iff N \leq 2^m - 1$$

すると、かりに $\{AND, OR\}$ が ac であれば,

$$f_1, \dots, f_p$$

の k_1, \dots, k_p 回以下の使用によつて任意の論理関数を実現できる筈である。 f_i は $\{AND, OR, NOT\}$ で実現できるが、その時 d_i 個の NOT が使われたとすると、結局

$$m = \sum_{i=1}^p k_i d_i$$

個の NOT で任意の論理関数が合成できることになり、

Markov の結果に矛盾する。

Mukhopadhyay は、Markov の結果の (\iff) のみ引用しており (p17), (\implies) を見逃がしていたようである。

定理 2 は、Post の次の結果からほとんど明らかである。

F が complete \iff F は次の 5 個の集合の、
どれにも含まれない ($\not\subseteq$)。

- 1) \mathcal{M} 2) \mathcal{L}
- 3) $\mathcal{S} =$ 自己双対関数の全体
- 4) $M_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$
- 5) $M_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$

この結果と、

$$\{0, 1\} \not\subseteq \mathcal{S}, M_0, M_1$$

$$\{0, 1\} \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{L}$$

から、定理2がただちに得られる。

定理3は次のようにしてたしかめられる。

$$F \forall \{0, 1\} \text{ が incomplete} \implies F \subseteq \mathcal{M} \text{ または } F \subseteq \mathcal{L}$$

ところが1章の中に指摘されているように (p19, Theorem 7.4),

$$F \subseteq \mathcal{L} \implies F \text{ は not ac}$$

また $F \subseteq \mathcal{M}$ が ac なら \mathcal{M} も ac であるが、それは $\{AND, OR\}$ が ac であることを意味し、定理1に反する。いずれにしても、 F は ac でない。

以上の結果から、almost complete set の特徴づけは、定理2で尽きていることがわかる。

§3 Multi-Inversion について

R D S T の 11 章で、Huffman が 1970 年に発表した、1 個の NOT による多変数の反転が論じられている。これは極めて巧妙な回路で、回路内掃りの状態が安定しないものにも拘らず、出力は (ある意味で) 安定になる。

しかし、この結果については、次のような疑問が生ずる。

(1) 同期式回路ならば, *feedback loop* がなくても, 1個の NOT 素子による多変数の反転が可能である。(NOT 素子の時分割利用).

(2) 非同期式回路として, Muller の理論の枠内で考えろと, Huffman の回路が正しく働くという保証はない。(ただし, Huffman が使用している多数決素子の動作時間が, 遅延素子に比べて充分短かければ, 誤った出力が出現する時間はごく短い(しかしくり返し限りなく起る)ので, もし技術的に除去可能なら, *practical* にも使えろかもしれない).

さて, このような出力のふるまいについて, 従来の Muller 流の非同期式回路理論はあまり多くのことを示してくれない。そこで出力の安定性の概念をごく小つりに定義した上で, 回路が出力安定になるための条件を調べてみたところ, 次の結果が得られた。

回路 C の 状態 を, 構成素子の出力ベクトル表示

$$a = (a_1, \dots, a_N)$$

であらわす。 N 個の素子のうち, p 個は外部出力端子に接続されているとし, それら

$$\omega(a) = (a_{i(1)}, \dots, a_{i(p)})$$

であらわす。

状態 a, b の推移を Muller と同じように定義し、

$$a \longrightarrow b$$

であらわすことにする。また、許容列

$$a(1) \longrightarrow a(2) \longrightarrow a(3) \longrightarrow \dots\dots\dots$$

の概念も、Muller と同様に定義する（ただし、条件

$$a(n) \neq a(n+1)$$

は要求しない）。 C の素子それぞれ同時に動作したとき、 a の次の状態を、 a' であらわす。

[注意] 入力 λ は、あ、てもよいが、‘充分な期間一定である’と仮定するので、以下入力には触れない。（定数パラメータと思えばよい）

[定義] 回路 C が初期状態 λ_0 に因して 出力安定 である

$$\iff \exists c = (c_1, \dots, c_p)$$

$$\forall \text{許容列} : \lambda_0 = \lambda(1) \longrightarrow \lambda(2) \longrightarrow \lambda(3) \longrightarrow \dots$$

$$\exists N \forall n \geq N : \omega(\lambda(n)) = c$$

[定義] 回路 C が初期状態 λ_0 に因して λ -出力安定 である

$$\iff \exists c = (c_1, \dots, c_p) \exists N \forall n \geq N :$$

$$\lambda_0^{(n)} = c$$

$$\text{ただし } \lambda_0^{(1)} = \lambda_0', \quad \lambda_0^{(n)} = [\lambda_0^{(n-1)}]'$$

[命題] C が 出力安定 $\implies C$ が λ -出力安定

$\therefore \lambda_0 \longrightarrow \lambda_0' \longrightarrow \lambda_0'' \longrightarrow \dots\dots$ は許容列だから明白。

この命題の逆がいつ成り立つか、が問題であり、ひとつの充分条件として、平行可能の概念がある。

[定義] C が平行可能であるとは、

$$a(1) \longrightarrow a(2) \longrightarrow a(3) \longrightarrow \dots$$

が許容列ならば

$$a(1)' \longrightarrow a(2)' \longrightarrow a(3)' \longrightarrow \dots$$

も許容列になることという。

[定理1] C が *semi-modular* \implies 平行可能

[定理2] C が平行可能かつ Δ -出力安定 \implies 出力安定

[定理3] C が *semi-modular* ならば、

$$\text{出力安定} \iff \Delta\text{-出力安定}$$

証明は [6] pp 195 - 197, pp 264 - 265 にのっている。

Huffman の回路に戻っていうと:

[命題] Huffman の回路は、出力安定でない (essential hazard がある)

多少定量的に述べると、次の事実がある。

(1) Huffman の回路は、遅延素子の動作時間のオーダーの正しい出力と、論理素子の動作時間のオーダーの誤った出力と交互に出す。

(2) 平行可能かつ Δ -出力安定な回路において、素子の動作時間が α でおさえられ、また

$$s_0 \longrightarrow s'_0 \longrightarrow s''_0 \longrightarrow \dots$$

において N ステップで出力が安定したとする。そのとき、どのような許容列においても（つまりいかなる場合でも）,

$$\alpha \leq pN$$

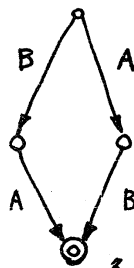
以内の時間で出力が安定する（ p は外部出力端子の個数）。

§4 Completeness Problem の拡張について

通常 2 値関数族についての completeness problem は、§2 で引用した Post の結果によって一応解決したと考えられる。この問題はしかし、次の 2 つ方向に拡張できる。

2 値・combinational (Post)

2 値,
時間遅れを考慮
(von Neumann 等)



多値・combinational (Skupecki 等)

多値, 時間遅れを考慮

すなわち A : 多値論理関数族への拡張, B : 時間遅れを含む場合への拡張である。以下, 主要な結果を簡単に展望する。

4. 1. 多値・combinational な場合

Ω を k 値論理関数全体の集合, \mathcal{F} をその部分集合とする。

\mathcal{F} から合成できる関数の全体を $\overline{\mathcal{F}}$ であらわす。

[定義] \mathcal{F} complete $\iff \overline{\mathcal{F}} = \Omega$

[補題] \mathcal{F} complete $\iff \forall M: \text{maximal incomplete set } M \not\subseteq \mathcal{F}$.

[定理] (Stupecki, 証明は [8] を見よ)

$$\mathcal{F} \text{ complete} \iff \begin{cases} (1) \overline{\mathcal{F}} \supseteq \Omega_1 & (\text{長値1変数関数の全体}) \\ (2) \mathcal{F} \not\subseteq N \end{cases}$$

ただし

$$N = \begin{cases} \mathcal{L} & (\text{線型関数の全体}) \dots \dots \text{長} = 2 \text{ のとき} \\ \mathcal{S} & (\text{本質的1変数関数と, not-onto 関数の全体}) \dots \dots \text{長} \geq 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

[定義] Ω_1 を 長値1変数論理関数の全体とする. Ω_1 は関数合成 \circ に関して半群となる (恒等写像 I が単位元).

$S \subseteq \Omega_1$ に対し,

$$F(S) \stackrel{P}{=} \{ f \in \Omega_1 ; \forall g_1, \dots, g_p \in S \\ f(x) = f(g_1(x), \dots, g_p(x)) \\ \text{とおくと, } f \in S \}$$

[定理] (Butler)

$$\overline{\mathcal{F}} \supseteq \Omega_1 \iff \begin{cases} \forall G, I \in G \not\subseteq \Omega_1, \Omega_1 \text{ の部分半群} \\ F(G) \not\subseteq \mathcal{F} \end{cases}$$

[系] M が maximal incomplete set ならば,

$$1) M = N$$

または

2) $\exists G, \Omega_1$ の部分半群, $I \in G, G \subsetneq \Omega_1$

$$\mathcal{M} = F(G).$$

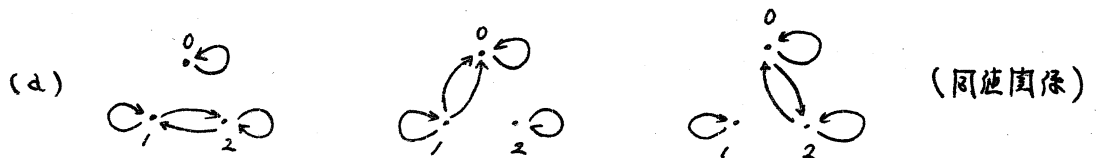
[系] maximal incomplete sets は有限個しかない.

Maximal incomplete sets を決定する作業は, $k=3$ の場合 Yablonski によって, $k \geq 3$ の場合 Rosenberg によって行なわれた. それらを explicit にかくには, [5] に述べた relation の言葉が便利である. たとえば Yablonski が与えた 18 個の sets は, 次の 18 種の relations によって特徴づけられる.

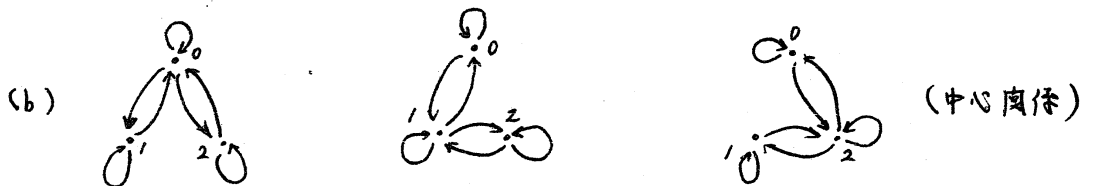
1) 1 次の relations ($R \subseteq X = \{0, 1, 2\}$):

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 0\}$

2) 2 次の relations ($R \subseteq X^2$)



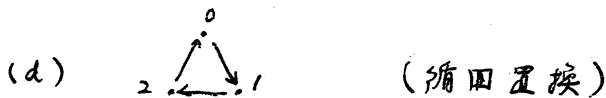
(同値関係)



(中心関係)



(順序関係)



(巡回置換)

3) 3次の関係

$$R_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} ; a \oplus b \oplus c = 0 \right\}$$

$$R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} ; a=b \text{ または } b=c \text{ または } c=a \right\}$$

[注] $F(R_2) = N$ となる.

4. 2. 多値・unit delay の場合

[5] のように \mathcal{F}^* と定義する ($\mathcal{F}^* \subseteq \overline{\mathcal{F}}$)

[補題] $\mathcal{F}^* = \Omega \iff \forall \mathcal{M}: \text{max. } * \text{-incomplete set}$
 $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{F}.$

[定理] (野村) \mathcal{M} が maximal $* \text{-incomplete}$ ならば

$$1) \exists a, b \in \{0, 1, \dots, k-1\}, a \neq b ;$$

$$\mathcal{M} = K(a, b)$$

$$\underline{D} = \{f \mid f(a, \dots, a) = f(b, \dots, b)\}$$

または

$$2) \exists S_0, \dots, S_n \subseteq \Omega_1, S_i \neq S_j \text{ if } i \neq j,$$

$$\mathcal{M} = \bigcap_{i=1}^n F(S_{i-1}, S_i)$$

ただし $F(S, S') = \{f \mid \forall g_1, \dots, g_p \in S \text{ に対し,}$

$$g(x) = f(g_1(x), \dots, g_p(x)) \text{ となる}$$

$$g \in S' \}$$

4. 3 ~~定理~~ 多値・非負整数 delay の場合

[] のように \sim を定義する.

[補題] σ が \sim -complete

$\iff \forall \tau$, maximal \sim -incomplete spectrum :

$$\tau \neq \sigma$$

[定理] (平田) τ が maximal \sim -incomplete spectrum ならば, 1) ~ 4) のどれかひとつが成り立つ.

1) $\exists \mathcal{M}$ maximal incomplete set : $\tau_i = \mathcal{M}$

2) $\exists s_0, \dots, s_{p-1} \subseteq \Omega_1$, $p \geq 2$,

$$\tau_i = \bigcap_{j=0}^{p-1} F(s_j, s_{j \oplus i})$$

3) $\exists s_0, s_1 \subseteq \Omega_1$, $\exists a, b$ ($a \neq b$) :

$$i) \quad \tau_0 = F(s_0, s_0)$$

$$ii) \quad \tau_i = F(s_0, s_1) \quad (i \geq 1)$$

$$iii) \quad s_1 \subseteq K(a, b)$$

4) $\exists \mathcal{M}$ maximal incomplete set :

$$i) \quad \mathcal{M} \cap \{\text{定数関数}\} = \emptyset$$

$$ii) \quad \tau_0 = \mathcal{M}$$

$$iii) \quad \tau_i = \text{定数関数の全体} \quad (i \geq 1)$$

これは最新の情報である ((1972), 平田輝雄, 東大修士論文).

関連する問題については, [5] a, b を参照のこと.

参考文献

- [1] Huffman, D. A., Logical Design with one NOT element, Proc. of 2nd Hawaii International Conference on System Sciences (1969)
- [2] Kuntzman, J., *Algebre de Boole*, Dunod (1967)
- [3] Markov, A. A., On the inversion complexity of a system of functions, JACM, vol. 5, 331-334 (1971)
- [4] Mukhopadhyay, A. (ed), RDST, Academic Press
- [5] 野崎昭弘「多値論理とオートマトン」京大数解研多値論理およびその応用研究会報告集 ((a) 1970, (b) 1971)
- [6] 野崎昭弘「スイッチング理論」共立出版 (1972)
- [7] Rosenberg, I., Structure de la classe des fonctions définies dans un ensemble fini quelconque, Comptes Rendus Sci. Paris, T 260 (1965)
- [8] Butler, J., On Complete and Independent Sets of ~~Algebra~~ ^{Operations} in finite algebras, Pacific J. of Math, 1167-1177 (1960)
- [9] Yablonski, J., Functional structure of k -valued logics, Trudi Math. Inst. Steklova 51 (1958) 5-142